



KAMALDNP

kamaldnp.com • IT Training, Varanasi

PDF created by Raj Kamal using AI

संक्षिप्त नोट्स — Mathematics-I

BTEUP डिप्लोमा • प्रथम सेमेस्टर (प्रथम वर्ष — सामान्य पाठ्यक्रम, सभी 41 ब्रांच) • संक्षिप्त नोट्स
Session 2026-27

संक्षिप्त पुनरावृत्ति नोट्स — KAMALDNP Academy द्वारा आधिकारिक BTEUP 2026-27 सिलेबस से तैयार किए गए। यह BTEUP का बोर्ड पेपर या प्रकाशन नहीं है।

ये **संक्षिप्त नोट्स** BTEUP 2026-27 सिलेबस के Mathematics-I के चारों भागों को आसान हिन्दी में समझाते हैं। हर विषय में पहले परिभाषा, फिर मुख्य सूत्र और हल करने के चरण दिए गए हैं, ताकि कम समय में पूरा पाठ्यक्रम दोहराया जा सके।

इनका उपयोग इस तरह करें — पहले एक भाग पढ़िए, फिर सूत्रों को बिना देखे लिखकर देखिए और अंत में दिया गया **संभावित प्रश्न** स्वयं हल कीजिए। ये केवल दोहराव के नोट्स हैं; पूरी तैयारी के लिए पाठ्यपुस्तक और कक्षा के हल किए हुए प्रश्न भी अवश्य पढ़ें।

बीजगणित और त्रिकोणमिति (Algebra & Trigonometry)

विषय-वस्तु: बीजीय व्यंजक और समीकरण; त्रिकोणमितीय अनुपात, सर्वसमिकाएँ तथा ऊँचाई और दूरी

बीजीय व्यंजक और समीकरण

स्थिरांकों और चरों को जोड़, घटाव, गुणा और भाग से जोड़ने पर बना समूह **बीजीय व्यंजक** कहलाता है, जैसे $3x^2 + 5x - 2$ । जिस व्यंजक में बराबर का चिन्ह हो और चर का कोई निश्चित मान उसे संतुष्ट करे, वह **समीकरण** है। चर की सबसे बड़ी घात 1 हो तो रैखिक समीकरण और घात 2 हो तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ बनता है।

- **द्विघात सूत्र:** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- **विविक्तकर:** $D = b^2 - 4ac$; $D > 0$ तो मूल वास्तविक और अलग, $D = 0$ तो मूल बराबर, $D < 0$ तो मूल काल्पनिक होते हैं।
- **मूलों का योग** $= -b/a$ और **मूलों का गुणनफल** $= c/a$ होता है।
- गुणनखंड विधि में मध्य पद को ऐसे दो भागों में तोड़िए जिनका गुणनफल $a \times c$ हो।

प्रश्न हल करने के बाद मूल समीकरण में मान रखकर उत्तर की जाँच अवश्य करें।

त्रिकोणमितीय अनुपात और सर्वसमिकाएँ

समकोण त्रिभुज में किसी न्यून कोण के लिए बनाए गए भुजाओं के अनुपात **त्रिकोणमितीय अनुपात** कहलाते हैं। यदि लंब, आधार और कर्ण क्रमशः P, B और H हों तो $\sin \theta = P/H$, $\cos \theta = B/H$, $\tan \theta = P/B$ होता है। cosec, sec और cot इनके व्युत्क्रम हैं। परीक्षा में मानक कोणों के मान बार-बार पूछे जाते हैं।

- 0° पर $\sin = 0$, $\cos = 1$, $\tan = 0$; 30° पर $\sin = 1/2$, $\cos = \sqrt{3}/2$, $\tan = 1/\sqrt{3}$
- 45° पर $\sin = \cos = 1/\sqrt{2}$, $\tan = 1$; 60° पर $\sin = \sqrt{3}/2$, $\cos = 1/2$, $\tan = \sqrt{3}$
- 90° पर $\sin = 1$, $\cos = 0$ और $\tan$ अपरिभाषित होता है।

तीन मूल **सर्वसमिकाएँ** याद रखिए — $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ और $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ । सिद्ध करने वाले प्रश्नों में एक पक्ष लेकर इन्हीं सर्वसमिकाओं से दूसरा पक्ष निकालना सबसे सुरक्षित तरीका है।

ऊँचाई और दूरी

किसी ऊँची वस्तु को देखने पर दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा के बीच बना कोण **उन्नयन कोण** कहलाता है, और ऊँचे स्थान से नीचे की वस्तु को देखने पर बना कोण **अवनमन कोण** कहलाता है। ऊँचाई और दूरी के सभी प्रश्न समकोण त्रिभुज पर आधारित होते हैं, इसलिए पहला काम हमेशा साफ चित्र बनाना है।

- वस्तु की ऊँचाई h, दूरी x और उन्नयन कोण θ हो तो **$\tan \theta = h / x$** , अर्थात् $h = x \tan \theta$ ।
- कोण और ऊँचाई दी हो तो दूरी $x = h / \tan \theta$ निकालिए।
- प्रेक्षक की आँख की ऊँचाई दी हो तो उसे अंत में जोड़ना न भूलें।
- अवनमन कोण हमेशा उन्नयन कोण के बराबर लेते हुए चित्र बनाइए, क्योंकि दोनों एकांतर कोण होते हैं।

प्रश्न में दी गई इकाइयाँ एक जैसी रखें और अंत में उत्तर के साथ मीटर अवश्य लिखें।

संभावित प्रश्न: द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ को सूत्र विधि से हल कीजिए तथा मूलों की प्रकृति बताइए। साथ ही सिद्ध कीजिए कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ होता है।

कलन (Calculus)

विषय-वस्तु: सीमा (limits); अवकलन और उसके अनुप्रयोग; समाकलन और उसके अनुप्रयोग; निश्चित समाकलन

सीमा (Limits)

जब चर x किसी मान a के बहुत निकट पहुँचता है और फलन $f(x)$ किसी निश्चित मान L के निकट पहुँचता है, तो L को फलन की **सीमा** कहते हैं और इसे $\lim (x \rightarrow a) f(x) = L$ लिखते हैं। सीमा में x का मान a के बराबर करना आवश्यक नहीं होता, केवल उसके निकट का व्यवहार देखा जाता है।

- **मानक सीमाएँ:** $\lim (x \rightarrow 0) \sin x / x = 1$, $\lim (x \rightarrow 0) \tan x / x = 1$, $\lim (x \rightarrow 0) (e^x - 1) / x = 1$
- $\lim (x \rightarrow 0) (a^x - 1) / x = \log_e a$ और $\lim (x \rightarrow \infty) (1 + 1/x)^x = e$ होता है।
- $0/0$ रूप आने पर पहले गुणनखंड कीजिए, परिमेयकरण कीजिए या मानक सीमा का रूप बनाइए।
- सीधा मान रखने पर निश्चित मान मिले तो वही सीमा है।

अवकलन की परिभाषा भी सीमा से ही बनती है, इसलिए इस विषय की मानक सीमाएँ अच्छी तरह याद करें।

अवकलन और उसके अनुप्रयोग

किसी फलन के परिवर्तन की दर को **अवकलज** कहते हैं। परिभाषा से $dy/dx = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] / h$ होता है। परीक्षा में परिभाषा से कम और नियमों से अधिक प्रश्न आते हैं, इसलिए मूल सूत्रों का अभ्यास सबसे जरूरी है।

- $d/dx (x^n) = n x^{n-1}$, $d/dx (\sin x) = \cos x$, $d/dx (\cos x) = -\sin x$, $d/dx (e^x) = e^x$, $d/dx (\log x) = 1/x$
- **गुणन नियम:** $(uv)' = u v' + v u'$; **भाग नियम:** $(u/v)' = (v u' - u v') / v^2$
- **श्रृंखला नियम:** संयुक्त फलन में बाहर से अंदर की ओर एक-एक करके अवकलन कीजिए।

अनुप्रयोग — किसी बिन्दु पर dy/dx वक्र की स्पर्श रेखा की ढाल देता है। उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के लिए $dy/dx = 0$ रखकर क्रांतिक बिन्दु निकालिए, फिर द्वितीय अवकलज से जाँचिए — d^2y/dx^2 ऋणात्मक हो तो उच्चिष्ठ और धनात्मक हो तो निम्निष्ठ होता है।

समाकलन और उसके अनुप्रयोग

अवकलन की उलटी क्रिया **समाकलन** कहलाती है। यदि $d/dx F(x) = f(x)$ हो तो $\int f(x) dx = F(x) + C$ लिखा जाता है, जहाँ C समाकलन स्थिरांक है। स्थिरांक लिखना न भूलें, क्योंकि अनिश्चित समाकलन में यही सबसे आम गलती होती है।

- $\int x^n dx = x^{n+1} / (n+1) + C$ ($n \neq -1$), $\int 1/x dx = \log |x| + C$, $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- **प्रतिस्थापन विधि:** जटिल भाग को t मानकर dx बदलिए। **खंडशः समाकलन:** $\int u v dx = u \int v dx - \int [u' \int v dx] dx$

अनुप्रयोग में समाकलन से वक्र के नीचे का क्षेत्रफल, दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल और घूर्णन से बने ठोस का आयतन निकाला जाता है। अवकलज दिया हो तो समाकलन करके मूल राशि भी प्राप्त की जाती है।

निश्चित समाकलन

जब समाकलन की सीमाएँ a और b दी गई हों तो वह **निश्चित समाकलन** कहलाता है और इसका मान एक निश्चित संख्या होता है, इसलिए इसमें स्थिरांक C नहीं आता। मूल प्रमेय के अनुसार यदि $\int f(x) dx = F(x)$ हो तो $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ होता है।

- सीमाएँ आपस में बदलने पर चिन्ह बदल जाता है — $\int_a^b = -\int_b^a$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, जहाँ c , a और b के बीच कोई बिन्दु है।
- $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ — यह गुण सममित प्रश्नों में समय बचाता है।
- फलन सम हो तो $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ और विषम हो तो मान शून्य होता है।

क्षेत्रफल — वक्र $y = f(x)$ और x -अक्ष के बीच a से b तक का क्षेत्रफल $\int_a^b y dx$ से मिलता है। चित्र बनाकर सीमा तय करना उत्तर की पहली शर्त है।

संभावित प्रश्न: x के सापेक्ष $x^2 \sin x$ का अवकलन कीजिए। $\int x e^x dx$ का मान खंडशः समाकलन से निकालिए और $\int_0^1 (3x^2 + 2x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

आव्यूह और सारणिक (Matrices & Determinants)

विषय-वस्तु: आव्यूहों के प्रकार; आव्यूहों पर संक्रियाएँ; सारणिक; रैखिक समीकरणों के निकाय का हल

आव्यूहों के प्रकार

संख्याओं को पंक्तियों और स्तंभों में आयताकार रूप में सजाने को **आव्यूह (matrix)** कहते हैं। m पंक्तियों और n स्तंभों वाले आव्यूह की कोटि $m \times n$ होती है और इसके अवयव a_{ij} से दिखाए जाते हैं, जहाँ i पंक्ति और j स्तंभ बताता है। प्रकारों के नाम और पहचान परीक्षा में सीधे पूछे जाते हैं।

- **पंक्ति आव्यूह** में केवल एक पंक्ति, **स्तंभ आव्यूह** में केवल एक स्तंभ होता है।
- **वर्ग आव्यूह** में पंक्तियाँ और स्तंभ बराबर होते हैं; इसके विकर्ण अवयव मुख्य विकर्ण बनाते हैं।
- **विकर्ण आव्यूह** में विकर्ण के बाहर सभी अवयव शून्य होते हैं; विकर्ण के सभी अवयव 1 हों तो वह **तत्समक आव्यूह** है।
- सभी अवयव शून्य हों तो **शून्य आव्यूह**, और $A = A^T$ हो तो **सममित आव्यूह** कहलाता है।

दो आव्यूह तभी बराबर होते हैं जब उनकी कोटि समान हो और संगत अवयव भी बराबर हों।

आव्यूहों पर संक्रियाएँ

आव्यूहों की संक्रियाओं में सबसे पहली जाँच हमेशा कोटि की होती है। **योग और अंतर** केवल समान कोटि के आव्यूहों में संभव है और संगत अवयव आपस में जुड़ते या घटते हैं। किसी संख्या k से गुणा करने पर हर अवयव k से गुणा हो जाता है, इसे अदिश गुणन कहते हैं।

- **गुणन की शर्त:** A की कोटि $m \times n$ और B की कोटि $n \times p$ हो तभी AB संभव है और AB की कोटि $m \times p$ होगी।
- गुणन में A की पंक्ति और B के स्तंभ के अवयवों को गुणा करके जोड़ते हैं।
- सामान्यतः $AB \neq BA$ होता है, इसलिए क्रम बदलने की गलती न करें।
- **परिवर्त आव्यूह A^T** पंक्तियों को स्तंभ बनाने से मिलता है; $(AB)^T = B^T A^T$ होता है।

योग क्रमविनिमेय और साहचर्य होता है, पर गुणन केवल साहचर्य होता है। प्रश्न में पहले कोटि जाँचकर लिख देने से पूरे अंक मिलते हैं।

सारणिक

हर वर्ग आव्यूह के साथ जुड़ा एक निश्चित संख्यात्मक मान **सारणिक (determinant)** कहलाता है, जिसे $|A|$ या $\det A$ लिखते हैं। सारणिक केवल वर्ग आव्यूह का होता है, आव्यूह स्वयं संख्याओं की व्यवस्था है जबकि सारणिक एक संख्या है — यही अंतर बार-बार पूछा जाता है।

- **द्वितीय कोटि:** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- **तृतीय कोटि** का प्रसार किसी एक पंक्ति या स्तंभ के अनुदिश उपसारणिक और सहखंड (+, -, + चिन्ह पैटर्न) से कीजिए।
- कोई पंक्ति या स्तंभ पूरा शून्य हो, दो पंक्तियाँ समान हों या एक पंक्ति दूसरी का गुणज हो तो सारणिक का मान शून्य होता है।
- दो पंक्तियाँ आपस में बदलने पर सारणिक का चिन्ह बदल जाता है।

प्रसार से पहले संक्रियाओं से किसी पंक्ति में अधिक शून्य बना लेने पर गणना बहुत आसान हो जाती है। $|A| = 0$ हो तो आव्यूह अव्युत्क्रमणीय कहलाता है।

रैखिक समीकरणों के निकाय का हल

दो या तीन अज्ञात राशियों वाले रैखिक समीकरणों के समूह को आव्यूह और सारणिक की सहायता से एक साथ हल किया जा सकता है। समीकरणों को $AX = B$ रूप में लिखिए, जहाँ A गुणांकों का आव्यूह, X अज्ञातों का और B स्थिर पदों का आव्यूह है।

- **आव्यूह विधि:** $|A| \neq 0$ हो तो $X = A^{-1}B$, जहाँ $A^{-1} = \text{adj } A / |A|$ होता है।
- **क्रैमर नियम:** तीन समीकरणों के लिए $x = D_x/D$, $y = D_y/D$, $z = D_z/D$, जहाँ D गुणांक सारणिक है और D_x में x के गुणांकों के स्थान पर स्थिर पद रखे जाते हैं।
- $D \neq 0$ हो तो हल अद्वितीय होता है; $D = 0$ होने पर हल नहीं भी हो सकता या अनंत हल भी हो सकते हैं।

हल निकालने के बाद मान मूल समीकरणों में रखकर जाँच अवश्य करें। चरण क्रम से लिखें — पहले D , फिर D_x , D_y , D_z और अंत में x, y, z ।

संभावित प्रश्न: सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए और क्रैमर नियम से समीकरणों $x + y + z = 6$, $x - y + z = 2$, $2x + y - z = 1$ को हल कीजिए।

अवकल समीकरण (Differential Equations)

विषय-वस्तु: प्रथम-कोटि अवकल समीकरण और उनके सरल अनुप्रयोग

प्रथम-कोटि अवकल समीकरण

जिस समीकरण में स्वतंत्र चर, आश्रित चर और उसके अवकलज एक साथ हों, वह **अवकल समीकरण** कहलाता है। सबसे बड़े अवकलज की कोटि समीकरण की **कोटि (order)** और उस अवकलज की घात उसकी **घात (degree)** कहलाती है। dy/dx वाला समीकरण प्रथम-कोटि का होता है और इसी का अध्ययन इस भाग में है।

- **चर पृथक्करणीय रूप:** $dy/dx = f(x) \cdot g(y)$ हो तो सभी y वाले पद एक ओर और x वाले पद दूसरी ओर लाकर दोनों ओर समाकलन कीजिए।
- **समघात समीकरण** में $y = vx$ रखकर पृथक्करणीय रूप बनाया जाता है।
- **रैखिक समीकरण:** $dy/dx + P y = Q$ का समाकलन गुणक $I.F. = e^{\int P dx}$ होता है और हल $y \times I.F. = \int Q \times I.F. dx + C$ से मिलता है।

हल में स्वेच्छ स्थिरांक C अवश्य लिखें और अंतिम उत्तर को मूल समीकरण के रूप में साफ-सुथरा व्यवस्थित करें।

सरल अनुप्रयोग

अवकल समीकरणों का सबसे सरल उपयोग वहाँ होता है जहाँ किसी राशि के बदलने की दर उसी राशि या समय पर निर्भर करती है। ऐसी स्थितियों में पहले दर को dy/dx या dN/dt के रूप में लिखना ही असली काम है, उसके बाद पृथक्करण और समाकलन की सामान्य विधि लगती है।

- **वृद्धि और ह्रास:** जनसंख्या या बैक्टीरिया की वृद्धि में $dN/dt = kN$ लेने पर $N = N_0 e^{(kt)}$ मिलता है; k ऋणात्मक हो तो यही सूत्र क्षय बताता है।
- **शीतलन का नियम:** वस्तु के ठंडा होने की दर उसके और वातावरण के तापांतर के समानुपाती होती है।
- **सरल परिपथ और मिश्रण** के प्रश्नों में भी दर वाला समीकरण बनाकर वही चरण दोहराए जाते हैं।

प्रारंभिक शर्त दी हो तो उसे लगाकर स्थिरांक C का मान निकालिए, तभी उत्तर पूर्ण माना जाता है। इकाई और समय का उल्लेख उत्तर में अवश्य करें।

संभावित प्रश्न: अवकल समीकरण $dy/dx = x y$ को चर पृथक्करण विधि से हल कीजिए। रैखिक समीकरण $dy/dx + 2y = e^x$ का समाकलन गुणक लिखकर उसे हल करने के चरण बताइए।

त्वरित दोहराव — एक-एक पंक्ति में

- द्विघात सूत्र $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$; $D \geq 0$ तो मूल वास्तविक और अलग होते हैं।
- मूलों का योग $= -b/a$ और मूलों का गुणनफल $= c/a$ होता है।

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ — तीनों सर्वसमिकाएँ मूल हैं।
- ऊँचाई वाले प्रश्नों में $\tan \theta = \text{ऊँचाई} / \text{दूरी}$ ही मुख्य सूत्र है।
- $\lim_{(x \rightarrow 0)} \sin x / x = 1$ और $\lim_{(x \rightarrow \infty)} (1 + 1/x)^x = e$ याद रखें।
- $d/dx (x^n) = n x^{n-1}$; गुणन नियम $(uv)' = u v' + v u'$ होता है।
- उच्चिष्ठ पर d^2y/dx^2 ऋणात्मक और निम्निष्ठ पर धनात्मक होता है।
- $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1) + C$; अनिश्चित समाकलन में C लिखना न भूलें।
- निश्चित समाकलन $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ से निकलता है।
- आव्यूह गुणन तभी संभव है जब पहले की स्तंभ संख्या दूसरे की पंक्ति संख्या के बराबर हो।
- द्वितीय कोटि का सारणिक $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ होता है।
- क्रैमर नियम में $x = D_x/D$, $y = D_y/D$, $z = D_z/D$ होता है।
- रैखिक अवकल समीकरण का समाकलन गुणक $e^{\int P dx}$ होता है।

KAMALDNP • kamaldnp.com • support@kamaldnp.com • +91 8318013442 • Varanasi, UP
 KAMALDNP Academy द्वारा आधिकारिक BTEUP 2026-27 सिलेबस के विषयों से तैयार। संक्षिप्त व्याख्याएँ लेखक की अपनी हैं, सिलेबस की मूल भाषा नहीं। किसी भी स्थानीय बदलाव के लिए कृपया अपने पॉलिटेक्निक से पुष्टि करें।

